LXXI Белорусская математическая олимпиада школьников

10 класс

1. Решите уравнение $4 \cdot (a!)^2 = b! + 4 \cdot a!$ в натуральных числах a и b.

Ответ: $a = 3$, $b = 5$.

2. Дан острый угол и точка K внутри него. Найдите геометрическое место лежащих внутри этого угла точек L таких, что через точки K и L можно провести параллельные прямые, отсекающие от угла треугольники, площадь одного из которых в 2 раза больше площади другого.

Ответ: заштрихованное на рис. 1 множество, которому не принадлежат точки его границы, за исключением точек K_1 и K_2; точки K_1 и K_2 лежат на луче OK (O – вершина данного угла) и удовлетворяют соотношениям $OK_1 = \sqrt{2}OK$ и $OK = \sqrt{2}OK_2$, а участки границы заштрихованного множества лежат на прямых, параллельных соответствующим сторонам данного угла.

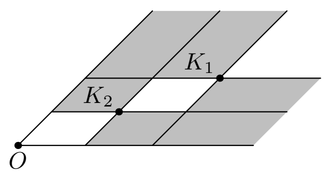

Рис. 1

3. Дан квадратный трёхчлен $p(x)$ со старшим коэффициентом, равным единице. Известно, что при некотором действительном a в ряду чисел

$$p\big(p(a)+a\big),\ \ p\big(p(a+1)+a+1\big),\ \ p\big(p(a+2)+a+2\big),\ \ \ldots,\ \ p\big(p(a+9)+a+9\big)$$

среди любых трёх подряд идущих есть нуль.

Найдите все возможные значения разности корней многочлена $p(x)$.

Ответ: 4.

4. На клетчатую доску размера 7×7 выкладывают без наложений уголки вида , образованные тремя клетками (уголок можно поворачивать на угол, кратный 90°, границы уголков идут по линиям сетки).

Какое наименьшее количество уголков необходимо разместить на доске, чтобы больше ни одного уголка выложить было невозможно?

Ответ: 8.